

Ein adaptiver Filter für eine Zufallszeitreihe

A. Uhl

Für eine gegebene Zufallszeitreihe mit deterministischen Anteilen

$$r_t = r_{t-1} + w_t \quad (1)$$

soll ein optimaler gleitender Durchschnitt berechnet werden.

Der optimale Filter

$$y_t = y_{t-1} + \delta_t \quad (2)$$

soll der Zeitreihe r_t

- a) in einem möglichst geringen Abstand folgen

$$(r_t - y_t)^2 = MIN \quad (3)$$

- b) möglichst glatt sein, d.h. er soll in seinem Verlauf eine möglichst geringe Anzahl von Richtungsänderungen aufweisen

$$(y'_t)^2 \approx (y_t - y_{t-1})^2 = MIN \quad (4)$$

Als Ausgangspunkt wird der einfache exponentielle gleitende Durchschnitt (EMA) betrachtet.

Der EMA ergibt sich aus dem Extremwert der Zielfunktion

$$\begin{aligned} \Phi_t^2(y_t) &= (1-g)(r_t - y_t)^2 + g(y_t - y_{t-1})^2 = MIN \\ y_t &= r_t + g(y_{t-1} - r_t) \end{aligned} \quad (5)$$

mit der Glättungskonstanten g , die alle Werte zwischen 0 und 1 annehmen kann.

Für den Fall $g \rightarrow 0$ geht die Zielfunktion nach Gl. (3) gegen Null. Für den Fall $g \rightarrow 1$ geht die Zielfunktion nach Gl. (4) gegen Null. Mit dem einfachen EMA wird somit der Zielkonflikt zwischen (3) und (4) optimal gelöst.

Im Verlauf von Zufallszeitreihen mit deterministischen Anteilen wie z.B. der Preiskurve eines Aktienindex gibt es Phasen, in denen eine hohes Glättungsmaß optimal ist (Seitwärtsbewegungen), und trendstarke Phasen, in denen eine geringe Glättung optimal ist. Der Parameter g müsste demnach variabel sein, sodass sich der Filter an die jeweilige momentane Charakteristik der Zeitreihe anpassen kann.

Neben dem konstanten Glättungsmaß ist ein weiterer Nachteil des EMA, dass er immer dann die Richtung wechselt, wenn die Zeitreihe r_t den Filter y_t kreuzt, bzw. über- oder unterschreitet.

Im nächsten Schritt soll eine optimale Glättungskonstante aus der Betrachtung von n zurückliegenden Werten der Zeitreihe r_t berechnet werden.

Hierfür wird zunächst die einfache Regressionsaufgabe betrachtet. Gesucht ist jetzt der Extremwert des Funktionals I_t

$$I_t = \sum_{x=1}^n [r_{t+x-n} - f_t(x)]^2 = \text{MIN}, \quad (6)$$

$$x = 1, \dots, n$$

Mit der Annahme, dass die Zeitreihe eine Trend a_t und einen Mittelwert b_t aufweist ist ein linearer Ansatz der Form

$$f_t(x_0) = a_t x_0 + b_t, \quad x_0 = x - \bar{x} \quad (7)$$

ausreichend. Die Annahme eines linearen Trends ist jedoch willkürlich. Daher wird die einfachste Ansatzfunktion

$$f_t = b_t = \text{const.}, \quad a_t = 0 \quad (8)$$

betrachtet.

Das Minimum des Funktionals Gl. (6) ergibt sich aus $dI_t/d b_t = 0$ und anschließender Summation über x zu

$$b_t = \frac{1}{n} \sum_{x=1}^n r_{t+x-n} = \bar{r}_t, \quad (9)$$

dem einfachen gleitenden Durchschnitt (SMA).

Um den SMA zu glätten wird das Funktional Gl. (6) erweitert (vgl. Gl. (5))

$$I_t = (1-g) \sum_{x=1}^n [r_{t+x-n} - b_t]^2 + g \sum_{x=1}^n [b_t - b_{t-1}]^2 = \text{MIN} \quad (10)$$

Die Ableitung $dI_t/d b_t = 0$ mit $g = \text{const.}$ und anschließende Summation über x liefert

$$b_t = \bar{r}_t + g(b_{t-1} - \bar{r}_t) \quad (11)$$

Im Unterschied zu Gl. (5) wird mit Gl. (11) der Mittelwert n zurückliegender Werte (SMA) anstelle des momentanen Wertes r_t der Zeitreihe geglättet.

Die wesentliche Verbesserung des EMA nach Gl. (5) besteht darin, dass für Gl. (11) das optimale Glättungsmaß g_t aus der Reihe

$$\tilde{g}_j = \frac{Q_{\text{Rest}}^2}{Q_{\text{Gesamt}}^2} = \frac{\sum_{x=1}^n [r_{t+x-n} - \tilde{b}_{j-1}]^2}{\sum_{x=1}^n [r_{t+x-n} - b_{t-1}]^2} \quad (12)$$

mit dem Startwert $\tilde{b}_0 = \bar{r}_t$ berechnet werden kann. Gl. (12) entspricht dem Unbestimmtheitsmaß in der Theorie der linearen Regression, wobei die Gesamtstreuung Q_{Gesamt}^2 nicht mit dem Mittelwert \bar{r}_t sondern mit b_{t-1} berechnet wird. Durch Integration bzw. Summation über x erhält man

$$\tilde{g}_j = \frac{1 + \nu \tilde{g}_{j-1}^2}{1 + \nu} \quad (13)$$

mit dem Startwert $\tilde{g}_0 = 0$, $\nu = \frac{n(\bar{r}_t - b_{t-1})^2}{s_t^2}$ und der Gesamtstreuung $s_t^2 = \sum_{x=1}^n [r_{t+x-n} - \bar{r}_t]^2$.

Das gesuchte optimale Glättungsmaß ist der Grenzwert der rekursiven Folge nach Gl. (12) bzw. Gl. (13)

$$g_t = \lim_{j \rightarrow \infty} (\tilde{g}_j) \quad (14)$$

(ohne Beweis).

Am Beispiel einer Sprungfunktion mit überlagertem stationärem weißem Rauschen $\sigma_w = 10$

$$r_t = \begin{cases} 100 + w_t, & t < 150 \\ 200 + w_t, & t \geq 150 \end{cases} \quad (15)$$

wird der gleitende Durchschnitt nach Gl. (11) berechnet und in Abb. 1 dargestellt.

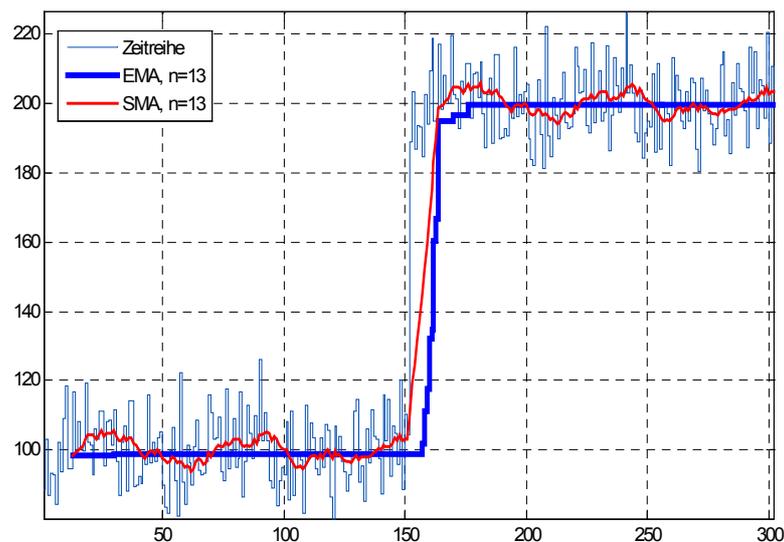


Abbildung 1: Sprungfunktion mit Filter

Die Abb. 1 zeigt, dass der EMA bezogen auf den Mittelwert der Zeitreihe \bar{r}_t optimal ist im Sinne der Definition auf Seite 1.

Zur weiteren Verdeutlichung der Arbeitsweise des EMA wird die folgende Zeitreihe betrachtet

$$s_t = 100 + 30 \sin\left(\frac{2\pi}{200}t\right) + 10e^{-dt^2} \sin\left(\frac{2\pi}{20}t\right), \quad d = 10^{-5} \quad (16)$$

Der exponentiell abklingende Sinus mit der Periode $T = 20$ soll als Störsignal angesehen werden.

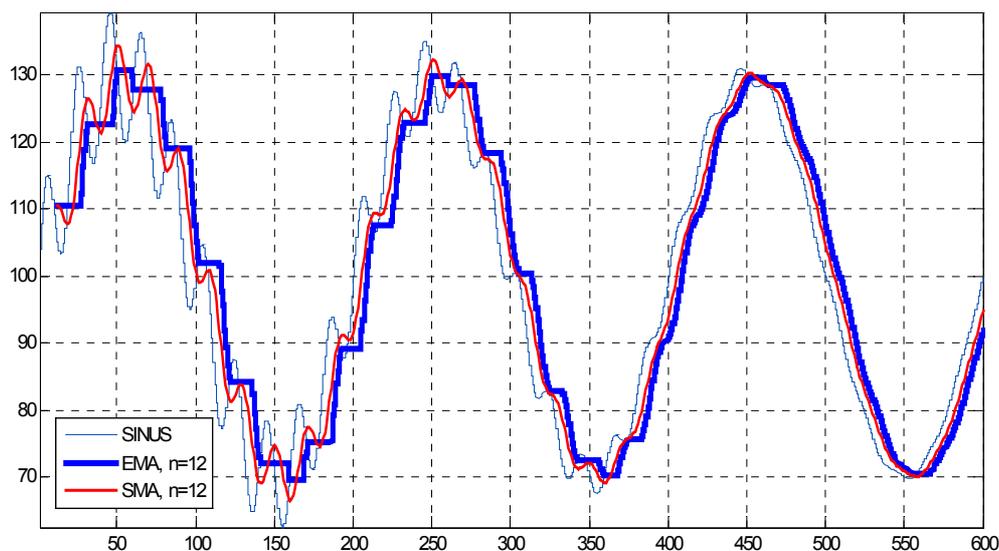


Abbildung 2: Sinus mit Störsignal

Die bereichsweise horizontalen Verläufe des Filters in Abb. 2 ergeben sich aus der Tatsache, dass der Abstand zwischen \bar{r}_t (SMA) und b_{t-1} einen (zur Amplitude des Störsignals proportionalen) Schwellenwert überschreiten muss, damit der EMA steigt oder fällt.

Praktische Anwendung

Gleitende Durchschnitte als sogenannte Trendindikatoren spielen eine große Rolle in der technischen Analyse von Finanzmarktdaten wie zum Beispiel in der Bewertung der Aktienmarktentwicklung durch Betrachtung eines Aktienindex. Der einfache gleitende Durchschnitt (SMA) nach Gl. (9) ist nur für eine visuelle Analyse geeignet, da er in trendschwachen Phasen durch häufige Richtungsänderungen falsche Signale erzeugt.

Der einfache exponentielle Durchschnitt nach Gl. (5) hat eine von der Größe des gewählten Glättungsmaßes abhängige Filterwirkung mit den entscheidenden Nachteilen, dass a) das Glättungsmaß nicht adaptiv ist und b) eine Trendumkehr angezeigt wird, sobald der aktuelle Wert der Zeitreihe seinen gleitenden Durchschnitt kreuzt, was wiederum zu einer Fülle von Fehlsignalen führt. Der einfache EMA ist wie der SMA nur für visuelle Analysen geeignet. Dieses gilt dann auch für alle Indikatoren, die auf einer einfachen Mittelwertbildung oder auf einer Glättung nach dem Prinzip des einfachen EMA basieren.

Der hier vorgestellte adaptive Filter (AEMA) nach Gl. (11), (12), (13), und (14) hat den entscheidenden Vorteil, dass der aktuelle Wert der Zeitreihe einen von der momentanen Volatilität abhängigen Schwellenwert überschreiten muss, damit der Filter steigt bzw. fällt, wodurch Fehlsignale in trendschwachen Phasen vermieden werden.

Zur Verdeutlichung wird am Beispiel des DAX der AEMA und der SMA in der Abbildung 3 verglichen.

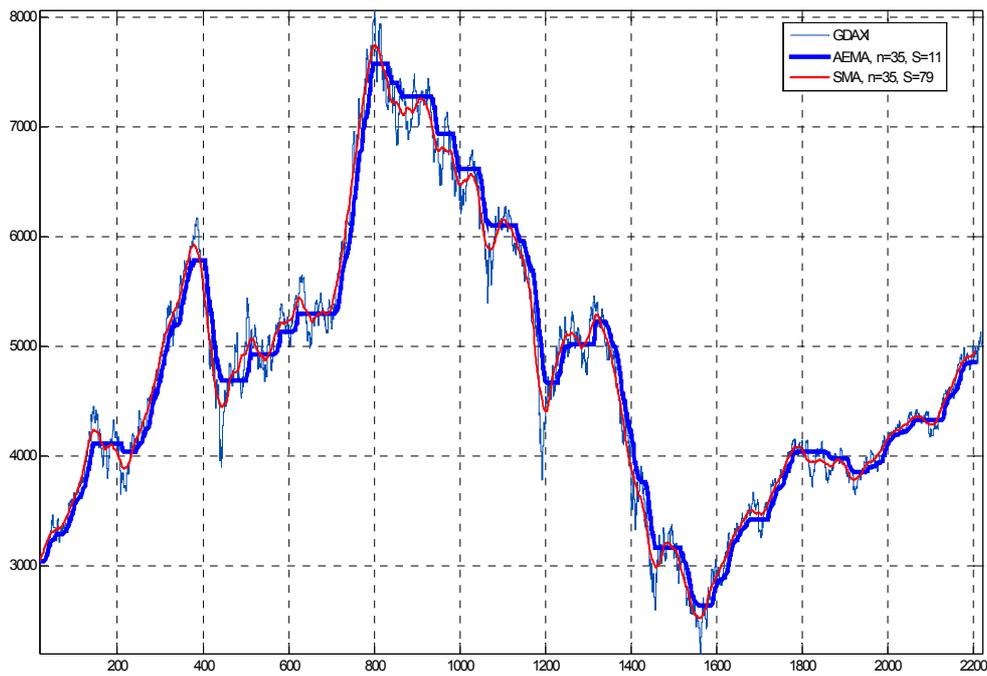


Abbildung 3: DAX mit gleitenden Durchschnitten für $n = 35$

Die Anzahl der Richtungsänderungen (Signale) für den SMA beträgt: $S = 79$, wobei als zusätzliche Bedingung für ein Signal gefordert wurde $r_t > \bar{r}_t$. Der AEMA hingegen gibt nur 11 Signale.